Análisis Matemático I
Espacios métricos y espacios normados

Javier Pérez González

Universidad de Granada
Departamento de Análisis Matemático

November 8, 2012

Un campo escalar diferenciable en un punto es continuo en dicho punto.

Un campo escalar diferenciable en un punto es continuo en dicho punto.

Para campos escalares diferenciables hay un análogo al teorema del valor medio para funciones derivables reales.

Un campo escalar diferenciable en un punto es continuo en dicho punto.

Para campos escalares diferenciables hay un análogo al teorema del valor medio para funciones derivables reales.

El segmento que une dos puntos $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ es el conjunto $[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \{\mathbf{u} + t(\mathbf{v} - \mathbf{u}) : 0 \leqslant t \leqslant 1\}$.

Un campo escalar diferenciable en un punto es continuo en dicho punto.

Para campos escalares diferenciables hay un análogo al teorema del valor medio para funciones derivables reales.

El segmento que une dos puntos $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ es el conjunto $[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \{\mathbf{u} + t(\mathbf{v} - \mathbf{u}) : 0 \leqslant t \leqslant 1\}$.

Teorema del valor medio para campos escalares.

Un campo escalar diferenciable en un punto es continuo en dicho punto.

Para campos escalares diferenciables hay un análogo al teorema del valor medio para funciones derivables reales.

El segmento que une dos puntos $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ es el conjunto $[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \{\mathbf{u} + t(\mathbf{v} - \mathbf{u}) : 0 \leqslant t \leqslant 1\}$.

Teorema del valor medio para campos escalares.
Sea f un campo escalar diferenciable en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Sean $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \Omega$ y supongamos que el segmento $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \subset \Omega$. Entonces existe un punto $\mathbf{c} \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ tal que se verifica la igualdad:

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \left\langle \nabla f(\mathbf{c}) \middle| \mathbf{b} - \mathbf{a} \right\rangle$$

De donde se deduce:

$$|f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})| \leqslant \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|_2 \sup\{\|\nabla f(\mathbf{x})\|_2 : \mathbf{x} \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]\}$$

Condición suficiente de diferenciabilidad.

Condición suficiente de diferenciabilidad.
Un campo escalar que tiene derivadas parciales continuas en un conjunto abierto es diferenciable en todo punto de dicho conjunto.

Condición suficiente de diferenciabilidad.
Un campo escalar que tiene derivadas parciales continuas en un conjunto abierto es diferenciable en todo punto de dicho conjunto.

Con frecuencia un campo escalar f puede expresarse en la forma $f(\mathbf{x}) = g(p(\mathbf{x}))$ donde p es una función polinómica en n variables. Como las funciones polinómicas en n variables tienen derivadas parciales continuas, son diferenciables y, por la proposición antes citada, deducimos que el campo escalar $f(\mathbf{x}) = g(p(\mathbf{x}))$ es diferenciable en todo punto $\mathbf{x}$ tal que g sea derivable en $p(\mathbf{x})$.

Condición suficiente de diferenciabilidad.
Un campo escalar que tiene derivadas parciales continuas en un conjunto abierto es diferenciable en todo punto de dicho conjunto.

Con frecuencia un campo escalar f puede expresarse en la forma $f(\mathbf{x}) = g(p(\mathbf{x}))$ donde p es una función polinómica en n variables. Como las funciones polinómicas en n variables tienen derivadas parciales continuas, son diferenciables y, por la proposición antes citada, deducimos que el campo escalar $f(\mathbf{x}) = g(p(\mathbf{x}))$ es diferenciable en todo punto $\mathbf{x}$ tal que g sea derivable en $p(\mathbf{x})$.

Un campo escalar definido en un dominio con derivadas parciales nulas en todo punto del mismo es constante.

Una curva Γ en el plano puede venir dada de tres formas:

a) Como la *gráfica de una función* $y = f(x)$ donde $x \in I$ siendo I un intervalo de $\mathbb{R}$.

$$\Gamma = \{(x, f(x)) : x \in I\}$$

Una curva Γ en el plano puede venir dada de tres formas:

a) Como la *gráfica de una función* $y = f(x)$ donde $x \in I$ siendo I un intervalo de $\mathbb{R}$.

$$\Gamma = \{(x, f(x)) : x \in I\}$$

b) Por medio de *ecuaciones paramétricas* $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.

$$\Gamma = \gamma(I) = \{(x(t), y(t)) : t \in I\}$$

Una curva Γ en el plano puede venir dada de tres formas:

a) Como la *gráfica de una función* $y = f(x)$ donde $x \in I$ siendo I un intervalo de $\mathbb{R}$.

$$\Gamma = \{(x, f(x)) : x \in I\}$$

b) Por medio de *ecuaciones paramétricas* $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.

$$\Gamma = \gamma(I) = \{(x(t), y(t)) : t \in I\}$$

c) De *forma implícita* como el conjunto de puntos $g(x, y) = 0$ donde se anula una función diferenciable de dos variables.

$$\Gamma = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\right\}$$

Una curva Γ en el plano puede venir dada de tres formas:

a) Como la *gráfica de una función* $y = f(x)$ donde $x \in I$ siendo I un intervalo de $\mathbb{R}$.

$$\Gamma = \{(x, f(x)) : x \in I\}$$

b) Por medio de *ecuaciones paramétricas* $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.

$$\Gamma = \gamma(I) = \{(x(t), y(t)) : t \in I\}$$

c) De *forma implícita* como el conjunto de puntos $g(x, y) = 0$ donde se anula una función diferenciable de dos variables.

$$\Gamma = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\right\}$$

Una curva Γ en el plano puede venir dada de tres formas:

a) Como la *gráfica de una función* $y = f(x)$ donde $x \in I$ siendo I un intervalo de $\mathbb{R}$.

$$\Gamma = \{(x, f(x)) : x \in I\}$$

b) Por medio de *ecuaciones paramétricas* $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.

$$\Gamma = \gamma(I) = \{(x(t), y(t)) : t \in I\}$$

c) De *forma implícita* como el conjunto de puntos $g(x, y) = 0$ donde se anula una función diferenciable de dos variables.

$$\Gamma = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\right\}$$

Suele usarse la siguiente terminología. Si $h(x, y)$ es un campo escalar diferenciable, las curvas de ecuación implícita $h(x, y) = c$ o, lo que es igual $h(x, y) - c = 0$, donde c es una constante, se llaman *curvas de nivel*. Dichas curvas se obtienen cortando la gráfica de h con planos de la forma $z = c$. Estas curvas son las que ves representadas en los mapas topográficos.

La tangente en un punto de Γ viene dada en cada caso como sigue.

a) La tangente en un punto $(a,b) = (a, f(a)) \in \Gamma$ es la recta de ecuación cartesiana

$$y - b = f'(a)(x - a)$$

El vector $(1, f'(a))$ es tangente a Γ en el punto (a,b) y el vector $(f'(a), -1)$ es ortogonal a Γ en el punto (a,b).

La tangente en un punto de Γ viene dada en cada caso como sigue.

a) La tangente en un punto $(a,b)=(a,f(a))\in\Gamma$ es la recta de ecuación cartesiana

$$y-b=f'(a)(x-a)$$

El vector $(1,f'(a))$ es tangente a Γ en el punto (a,b) y el vector $(f'(a),-1)$ es ortogonal a Γ en el punto (a,b).

b) La tangente en un punto $\gamma(t_0)=(a,b)\in\Gamma$ es la recta de ecuaciones paramétricas

$$(x,y)=\gamma(t_0)+t\,\gamma'(t_0)=(a,b)+t(x'(t_0),y'(t_0))$$

El vector $\gamma'(t_0)=(x'(t_0),y'(t_0))$ es tangente a Γ en (a,b).

La tangente en un punto de Γ viene dada en cada caso como sigue.

a) La tangente en un punto $(a,b)=(a,f(a))\in\Gamma$ es la recta de ecuación cartesiana

$$y-b=f'(a)(x-a)$$

El vector $(1,f'(a))$ es tangente a Γ en el punto (a,b) y el vector $(f'(a),-1)$ es ortogonal a Γ en el punto (a,b).

b) La tangente en un punto $\gamma(t_0)=(a,b)\in\Gamma$ es la recta de ecuaciones paramétricas

$$(x,y)=\gamma(t_0)+t\,\gamma'(t_0)=(a,b)+t(x'(t_0),y'(t_0))$$

El vector $\gamma'(t_0)=(x'(t_0),y'(t_0))$ es tangente a Γ en (a,b).

c) La tangente en un punto $(a,b)\in\Gamma$ es la recta de ecuación implícita

$$\big\langle\nabla g(a,b)\big|(x-a,y-b)\big\rangle=0$$

Se supone que $\nabla g(a,b)\neq 0$ pues en otro caso, la tangente en (a,b) no está definida. El vector gradiente $\nabla g(a,b)$ es ortogonal a Γ en el punto (a,b).

Una superficie S en el espacio $\mathbb{R}^3$ puede venir dada de tres formas:

a) Como la gráfica de una función $y = f(x,y)$ donde $(x,y) \in A$ siendo A un conjunto de $\mathbb{R}^2$.

$$S = \{(x,y,f(x,y)) : (x,y) \in A\}$$

Una superficie S en el espacio $\mathbb{R}^3$ puede venir dada de tres formas:

a) Como la gráfica de una función $y = f(x,y)$ donde $(x,y) \in A$ siendo A un conjunto de $\mathbb{R}^2$.

$$S = \{(x,y,f(x,y)) : (x,y) \in A\}$$

b Por ecuaciones paramétricas $\gamma(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$ donde $(s,t) \in A \subset \mathbb{R}^2$.

$$S = \gamma(A) = \{(x(s,t), y(s,t), z(s,t)) : (s,t) \in A\}$$

Una superficie S en el espacio $\mathbb{R}^3$ puede venir dada de tres formas:

a) Como la gráfica de una función $y = f(x,y)$ donde $(x,y) \in A$ siendo A un conjunto de $\mathbb{R}^2$.

$$S = \{(x,y,f(x,y)) : (x,y) \in A\}$$

b Por ecuaciones paramétricas $\gamma(s,t) = (x(s,t),y(s,t),z(s,t))$ donde $(s,t) \in A \subset \mathbb{R}^2$.

$$S = \gamma(A) = \{(x(s,t),y(s,t),z(s,t)) : (s,t) \in A\}$$

c) De forma implícita como el conjunto de puntos $g(x,y,z) = 0$ donde se anula una función diferenciable de tres variables.

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(x,y,z) = 0\right\}$$

El plano tangente en un punto de S viene dado en cada caso como sigue.

a) El plano tangente en un punto $(a, b, c) = (a, b, f(a, b)) \in S$ es el plano de ecuación cartesiana

$$z - f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

Los vectores $\left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\right)$ y $\left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\right)$ son tangentes a S en (a, b, c) y el vector

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b), -1\right)$$

es ortogonal a S en el punto (a, b, c).

b) El plano tangente en un punto $\gamma(s_0, t_0) = (a, b, c) \in S$ es el plano de ecuaciones paramétricas

$$(x, y, z) = \gamma(s_0, t_0) + s\frac{\partial\gamma}{\partial s}(s_0, t_0) + t\frac{\partial\gamma}{\partial t}(s_0, t_0)$$

Donde

$$\frac{\partial\gamma}{\partial s}(s_0, t_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial s}(s_0, t_0), \frac{\partial y}{\partial s}(s_0, t_0), \frac{\partial z}{\partial s}(s_0, t_0)\right)$$

y

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t}(s_0, t_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial t}(s_0, t_0), \frac{\partial y}{\partial t}(s_0, t_0), \frac{\partial z}{\partial t}(s_0, t_0)\right)$$

Dichos vectores son tangentes a S en (a, b, c).

c) El plano tangente en un punto $(a, b, c) \in S$ es el plano de ecuación implícita

$$\left\langle \nabla g(a, b, c) \middle| (x - a, y - b, z - c) \right\rangle = 0$$

Se supone que $\nabla g(a, b, c) \neq 0$ pues en otro caso, el plano tangente a S en (a, b, c) no está definido. El vector gradiente $\nabla g(a, b, c)$ es ortogonal a S en el punto (a, b, c).

Una curva Γ en el espacio puede venir dada de dos formas.

a) Como intersección de dos superficies S_1 y S_2.

Una curva Γ en el espacio puede venir dada de dos formas.

a) Como intersección de dos superficies S_1 y S_2.

b) Por medio de ecuaciones paramétricas $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ donde $t \in I \subset \mathbb{R}$ e I es un intervalo.

$$\Gamma = \gamma(I) = \{(x(t), y(t), z(t)) : t \in I\}$$

La tangente en un punto de Γ viene dada en cada caso como sigue.

La tangente en un punto de Γ viene dada en cada caso como sigue.

a) La tangente en un punto $(a,b,c)\in\Gamma$ es la recta intersección de los planos tangentes a S_1 y a S_2 en (a,b,c). Por ejemplo, si las superficies vienen dadas por sus ecuaciones implícitas.

$$S_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : f(x,y,z)=0\}$$
$$S_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : g(x,y,z)=0\}$$
$$\Gamma=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : g(x,y,z)=f(x,y,z)=0\}$$

Entonces, las ecuaciones implícitas de la recta tangente son

$$\begin{cases} \big\langle \nabla f(a,b,c) \big| (x-a,y-b,z-c)\big\rangle = 0 \\ \\ \big\langle \nabla g(a,b,c) \big| (x-a,y-b,z-c)\big\rangle = 0 \end{cases}$$

Donde se supone que los vectores gradiente $\nabla f(a,b,c)$, $\nabla g(a,b,c)$ son linealmente independientes pues, en otro caso, la recta tangente a la curva Γ en (a,b,c) no está definida.

b) La tangente en un punto $\gamma(t_0) = (a,b,c) \in \Gamma$ es la recta de ecuaciones paramétricas

$$(x,y,z) = \gamma(t_0) + t\,\gamma'(t_0) = (a,b,c) + t(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$$

El vector $\gamma'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ es tangente a Γ en (a,b,c).

Supongamos un campo escalar f con derivadas parciales $D_k f$ en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Las funciones $D_k f$ son también campos escalares de n variables que podemos, cuando se dejen, volver a derivar parcialmente en puntos de Ω. Obtenemos de esta forma las *derivadas parciales de segundo orden* de f, es decir las funciones $D_{jk} f = D_j(D_k f)$, que se representan también de las formas:

$$D_{jk} f(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \, \partial x_k}(\mathbf{x}), \quad D_{jj} f(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(\mathbf{x})$$

De manera análoga se definen las derivadas parciales de tercer orden de f como las derivadas parciales de las derivadas parciales de segundo orden de f, $D_{ijk}f = D_i(D_j(D_k f))$, y se representan también de las formas:

$$D_{ijk}f(\mathbf{x}) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_i\, \partial x_j\, \partial x_k}(\mathbf{x});\ D_{jjj}f(\mathbf{x}) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_j^3}(\mathbf{x});\ D_{jjk}f(\mathbf{x}) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_j^2 \partial x_k}(\mathbf{x})$$

Las derivadas parciales de cuarto orden son las derivadas parciales de las derivadas parciales de tercer orden y así sucesivamente.

Es natural preguntarse si el orden en que se realizan las derivadas debe ser o no tenido en cuenta. Afortunadamente, en la mayoría de los casos podemos olvidarlo porque se verifica el siguiente utilísimo resultado.

Teorema de Schwarz.

Las derivadas parciales de orden menor o igual que k de un campo escalar con derivadas parciales de orden k continuas solamente dependen del número de veces que se deriva parcialmente respecto de cada variable, pero el orden en que se realicen dichas derivaciones no afecta para nada al resultado final.

Es natural preguntarse si el orden en que se realizan las derivadas debe ser o no tenido en cuenta. Afortunadamente, en la mayoría de los casos podemos olvidarlo porque se verifica el siguiente utilísimo resultado.

Teorema de Schwarz.

Las derivadas parciales de orden menor o igual que k de un campo escalar con derivadas parciales de orden k continuas solamente dependen del número de veces que se deriva parcialmente respecto de cada variable, pero el orden en que se realicen dichas derivaciones no afecta para nada al resultado final.

Se dice que un campo escalar f es de clase $\mathcal{C}^k$ en un abierto Ω si f tiene derivadas parciales de orden k continuas en Ω, en cuyo caso escribimos $f \in \mathcal{C}^k(\Omega)$. Se dice que f es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en Ω si tiene derivadas parciales continuas de todos órdenes en Ω.